UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2021-2022**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

MODELO
Orientativo
Provisional

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x\, e^{4-x^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0, \infty)$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una sonda planetaria se lanza desde el punto $P(1,0,2)$ y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto $Q(3,1,0)$ antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de a para los que la matriz A no tiene inversa.

b) (1 punto) Para $a = 1$, calcular la inversa de la matriz A.

c) (1 punto) Para $a = 2$, resolver el sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x) = x + x^2$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de f y la recta $y = 2x$.

b) (1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de f. En el punto $(1, f(1))$ la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x = 2$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6$, $\pi_2 \equiv 3x - z = 2$ y el punto $A(1, 7, 1)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.

b) (0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.

c) (0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.

d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

OPCIÓN A

Ejercicio 1.
Por plantear cada ecuación correctamente: 0.5 puntos. Por resolver el sistema, interpretando el resultado: 1 punto.

Estándar de aprendizaje evaluado:
Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

Ejercicio 2.
a) Continuidad: 0.25 puntos. Derivabilidad: 0.5 puntos (repartidos en 0.25 por el planteamiento, y 0.25 por los cálculos).
b) Hallar el punto crítico: 0.5 puntos. Demostrar que es máximo: 0.5 puntos. En ambos casos, 0.25 por el planteamiento y 0.25 por la resolución.
c) Hallar la primitiva: 0.25 puntos. Aplicar la regla de Barrow: 0.25 puntos. Resultado: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad. Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Aplica la regla de L'Hôpital para resolver indeterminaciones en el cálculo de límites. Aplica los métodos básicos para el cálculo de primitivas de funciones.

Ejercicio 3.
a) Por hallar el punto de intersección: 0.75 puntos. Por hallar el coseno del ángulo: 0.75 puntos. En ambos casos, 0.5 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la resolución.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos. Si hallan las dos soluciones y no distinguen cual de ellas es la anterior al impacto, se penalizará con 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones. Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos, y resolviendo los problemas afines entre rectas. Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos.

Ejercicio 4.
a) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad final de un suceso aplicando la fórmula de Bayes. Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace.

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
En cada ejercicio, aunque el procedimiento seguido sea diferente al propuesto en las soluciones, cualquier argumento válido que conduzca a la solución será valorado con la puntuación asignada.

OPCIÓN B

Ejercicio 1.
a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

Ejercicio 2.
a) Por encontrar la región: 0.5 puntos. Por resolver la integral: 0.5 puntos.
b) Por la ecuación de la recta tangente: 1 punto. Por encontrar el punto de intersección: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Aplica los conceptos de límite y de derivada, así como los teoremas relacionados, a la resolución de problemas. Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas.

Ejercicio 3.
a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Por hallar la arista del cubo: 0.75 puntos (divididos en 0.5 puntos por el planteamiento y 0.25 puntos por la resolución). Por escribir la fórmula del volumen del cubo a partir de la longitud de la arista: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.5 puntos.

Estándares de aprendizaje evaluados: Determina ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando los productos escalar, vectorial y mixto, aplicándolos en cada caso a la resolución de problemas geométricos. Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.

Ejercicio 4.
a) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
b) Planteamiento: 0.25 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
c) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
d) Planteamiento: 0.5 puntos. Resolución: 0.25 puntos.
Se valorará con 0.25 puntos el saber que los sucesos contrarios también son independientes, aunque no les sirva para resolver bien las cuestiones.

Estándares de aprendizaje evaluados: Calcula la probabilidad de sucesos en experimentos simples y compuestos mediante la regla de Laplace, las fórmulas derivadas de la axiomática de Kolmogorov y diferentes técnicas de recuento. Calcula probabilidades asociadas a una distribución binomial a partir de su función de probabilidad, de la tabla de la distribución o mediante calculadora.

MATEMÁTICAS II—SOLUCIONES

(Documento de trabajo orientativo)

OPCIÓN A

Ejercicio 1

Sean x: nº de alumnos de inglés, y: nº de alumnos de francés y z: nº de alumnos de alemán.
Estas variables deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{r} x = 0.6(x+y+z) \\ y-10 = z+10 \\ \dfrac{x}{4} - 8 = 2(y-z) \end{array}\right.$$

con solución $(x, y, z) = (192, 74, 54)$. Es decir, en esta academia hay matriculados 192 alumnos en inglés, 74 en francés y 54 en alemán.

Ejercicio 2

a) En el punto $x = 0$, $\lim_{x\to 0^-} \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 0$, aplicando la Regla de L'Hôpital; $\lim_{x\to 0^+} xe^{4-x^2} = 0 = f(0)$. Por tanto, f es continua en 0. En cuanto a la derivabilidad, $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} -\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) = 0$, aplicando la Regla de L'Hôpital; $f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} (1-2x^2)e^{4-x^2} = e^4$. Al diferir las derivadas laterales, f no es derivable en $x = 0$.
b) Los puntos críticos de f en $(0, \infty)$ verifican $0 = f'(x) = (1-2x^2)e^{4-x^2}$, es decir, $x^2 = \frac{1}{2}$. Por ser $x > 0$, el único punto crítico es $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A su izquierda, $f'(1/2) = (1/2)e^{4-(1/2)} > 0$; a su derecha, $f'(2) = -7 < 0$. Por tanto, es un máximo relativo.
c) Puesto que $\int xe^{4-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{4-x^2} + C$, aplicando la regla de Barrow obtenemos que $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$.

Ejercicio 3

a) Las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la sonda son $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$ de modo que la intersección con π se produce cuando λ es solución de la ecuación $2(1+2\lambda) - \lambda + 2(2-2\lambda) + 5 = 0$, es decir, $\lambda = 11$, y el punto de impacto es $(23, 11, -20)$. Si α es el ángulo que forma la trayectoria con el plano vector normal al plano π, como el vector director de la trayectoria es $\vec{v} = (2, 1, -2)$ y el vector normal al plano es $\vec{n} = (2, -1, 2)$, se tiene que

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{n}\|} = \frac{1}{9}.$$

b) La distancia de un punto cualquiera de la trayectoria al plano π viene dada por

$$\frac{|2(1+2\lambda) - \lambda + 2(2-2\lambda) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|11-\lambda|}{3}.$$

Por tanto, la distancia es igual a 1 cuando $\lambda = 8$, es decir, cuando la sonda está en $(17, 8, -14)$ (y también cuando $\lambda = 14$; pero si nos damos cuenta de que P corresponde a $\lambda = 0$ y Q corresponde a $\lambda = 1$, ese punto estaría al otro lado del plano, después del punto de impacto).

Ejercicio 4

a) $P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{7}{19}\cdot\dfrac{6}{20} + \dfrac{12}{19}\cdot\dfrac{9}{20} = 0.395.$

b) $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \dfrac{7}{19}\cdot\dfrac{14}{20} + \dfrac{12}{19}\cdot\dfrac{9}{20} = 0.542.$

c) $P(N_1|B_2) = \dfrac{\frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20}}{\frac{15}{38}} = \dfrac{18}{25} = 0.72.$

SOLUCIONES
(Documento de trabajo orientativo)
OPCIÓN B

Ejercicio 1

a) $|A| = a + a^2 \to$ La matriz A no tiene inversa para los valores $a = 0$ y $a = -1$.
b) $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
c) Para $a = 2$: Planteamos el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \to x = -2, y = 2, z = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 2

a) $f(x) = 2x \Leftrightarrow x = 0, 1$. Además, $2x > f(x)$ en $(0, 1)$. Por tanto, el área buscada es

$$\int_0^1 2x - (x + x^2)dx = \cdots = 1/6.$$

b) $f'(x) = 1 + 2x$, de modo que $f'(1) = 3$. Por tanto la recta tangente en el punto $(1, f(1)) = (1, 2)$ tiene ecuación $y = 2 + 3(x - 1) = 3x - 1$, por lo que cuando $x = 2$ debe ser $y = 5$.

Ejercicio 3

a) Los vectores normales a los planos π_1 y π_2 son, respectivamente, $\vec{n}_1 = (1, -2, 3)$ y $\vec{n}_2 = (3, 0, -1)$. Su producto escalar es $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ y por tanto los planos π_1 y π_2 son perpendiculares entre sí.
b) Ya que los planos son perpendiculares y contienen a dos caras del cubo, y que el punto A pertenece al plano π_2, se deduce que la longitud de una arista del cubo viene dada por la distancia de A al plano π_1: $d(A, \pi_1) = \dfrac{16}{\sqrt{14}}$.
El volumen del cubo es $\left(\dfrac{16}{\sqrt{14}}\right)^3$.
c) La recta perpendicular a π_1 y que pasa por A es $(1, 7, 1) + \lambda(1, -2, 3)$. Corta a π_1 con $\lambda = \frac{8}{7}$. El punto simétrico es $(1, 7, 1) + \dfrac{16}{7}(1, -2, 3) = \left(\dfrac{23}{7}, \dfrac{17}{7}, \dfrac{55}{7}\right)$.

Ejercicio 4

a) $P(A \cap B) = 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.06}$.
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.8 \cdot 0.7 = \boxed{0.56}$.
c) $P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0.2 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 = \boxed{0.38}$.
d) $P(n = 3) = \dbinom{10}{3} 0.2^3 (1 - 0.2)^7 = \boxed{0.201326592}$.

CURSO 2021-2022

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACIÓN DEL ACCESO A LA UNIVERSIDAD DE LA ASIGNATURA MATEMÁTICAS II.

Para la elaboración de las pruebas se seguirán las características, el diseño y el contenido establecido en el currículo básico de las enseñanzas del segundo curso de bachillerato LOMCE que está publicado en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, así como por la normativa correspondiente que se promulgue y que afecte a las características, el diseño y el contenido de la evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad, y las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas en el curso 2021/2022.